

مقياس راوث هيروتز

Routh Hurwitz Criteria

سوف نتناول هنا دراسة استقرار أنظمة التحكم ذات التغذية الخلفية باستخدام طريقة راوث هيروتز Routh Hurwitz Criteria.

تعريف استقرار الأنظمة System Stability:
بفرض أن $y(t)$ هي الاستجابة الزمنية للنظام لإشارة الخطوة وكان:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = L$$

فان النظام يكون مستقراً إذا كان L ذو قيمة محددة.

وكما درسنا سابقاً أن الاستجابة الزمنية لنظم الرتبة الأولى والثانية تكون على الصورة:

$$y(t) = A_1 + A_2 e^{r_i t}$$

حيث r_i هي جذور المعادلة المميزة للنظام، ومن خصائص الدالة الأسية:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A e^{r t} = \begin{cases} A & r = 0 \\ 0 & r < 0 \\ \infty & r > 0 \end{cases}$$

فانه يمكن القول بأن النظام يكون مستقراً (Stable) إذا كانت جذور المعادلة المميزة للنظام سالبة، أى أن جميع جذور هذه المعادلة تقع فى النصف الأيسر من مستوى الإحداثيات المركب Left Hand Side of S-plane (RHS).

ويكفى أن يكون جذراً واحداً موجباً ليكون النظام غير مستقر ويقع هذا الجذر فى النصف الأيمن من مستوى الإحداثيات المركب Right Hand Side of S-plane (RHS).

ولكن فى حالة الأنظمة ذات الرتب العليا، فان عملية حساب جذور المعادلة المميزة للنظام تكون معقدة. وطريقة راوث لدراسة استقرار الأنظمة فهي طريقة جبرية تعطى معلومات عن استقرار النظم دون الحاجة الى حساب جذور المعادلة المميزة للنظام.

جدول راوث:

لتكن المعادلة التفاضلية الزمنية للنظام على الشكل التالى:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u(t) \quad (1)$$

حيث:

$y'(t)$ هي المشتقة الأولى للمتغير $y(t)$

$y''(t)$ هي المشتقة الثانية للمتغير $y(t)$

$y^{(n)}(t)$ هي المشتقة النونية للمتغير $y(t)$ وهكذا ...

بأخذ تحويل لابلاس للمعادلة (1) مع إهمال الشروط الابتدائية، نحصل على المعادلة المميزة للنظام على الشكل التالي:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

من المعادلة المميزة للنظام، يتم بناء جدول راوث كالتالي:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	
s^{n-2}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	
s^{n-3}	c_{n-1}	c_{n-3}	c_{n-5}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
s^0	h_{n-1}			

حيث:

$$b_{n-1} = \frac{(a_{n-1})(a_{n-2}) - a_n(a_{n-3})}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-3} = \frac{(a_{n-1})(a_{n-4}) - a_n(a_{n-5})}{a_{n-1}}$$

$$c_{n-1} = \frac{(b_{n-1})(a_{n-3}) - (a_{n-1})(b_{n-3})}{b_{n-1}}$$

$$c_{n-3} = \frac{(b_{n-1})(a_{n-5}) - (a_{n-1})(b_{n-5})}{b_{n-1}} \dots\dots$$

معيار راوث لاستقرار النظم:

يكون النظام مستقراً إذا كانت كل عناصر العمود الأول في جدول راوث لها نفس الإشارة.

وإذا كان هناك تغيراً في إشارات العمود الأول من جدول راوث، فإن النظام يكون غير مستقر ويوجد بعض الجذور في النصف الأيمن من مستوى الإحداثيات المركب (RHS) عددها يساوى عدد التغيرات في إشارة عناصر العمود الأول من جدول راوث.

مثال 1:

ليكن لدينا النظام التالي:

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 5u(t)$$

(أ) اكتب المعادلة المميزة للنظام

(ب) اختبر استقرار النظام

الحل:

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 5u(t)$$

(أ) بأخذ تحويل لابلاس لهذه المعادلة مع إهمال الشروط الابتدائية:

$$s^2 Y(s) + 2s Y(s) + 3Y(s) = 5U(s)$$

$$\Rightarrow (s^2 + 2s + 3) Y(s) = 5U(s)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5}{s^2 + 2s + 3}$$

المعادلة المميزة للنظام هي:

$$s^2 + 2s + 3 = 0$$

(ب) اختبار استقرار النظام:

جدول راوث للنظام هو:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 3 \\ s^1 & 2 & 0 \\ s^0 & 3 & 0 \end{array}$$

حيث انه لا يوجد تغيير في إشارات عناصر العمود الأول من جدول راوث، فان النظام مستقر.

مثال 2:

ليكن لدينا النظام التالي:

$$y'''(t) + 2y''(t) + 2y'(t) + 10y(t) = u(t)$$

(أ) اكتب المعادلة المميزة للنظام

(ب) اختبر استقرار النظام

الحل:

$$y'''(t) + 2y''(t) + 2y'(t) + 10y(t) = u(t)$$

(أ) بأخذ تحويل لابلاس لهذه المعادلة مع إهمال الشروط الابتدائية:

$$s^3 Y(s) + 2s^2 Y(s) + 2s Y(s) + 10Y(s) = U(s)$$

$$\Rightarrow (s^3 + 2s^2 + 2s + 10) Y(s) = U(s)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5}{s^3 + 2s^2 + 2s + 10}$$

المعادلة المميزة للنظام هي:

$$s^3 + 2s^2 + 2s + 10 = 0$$

(ب) اختبار استقرار النظام:

جدول راوث للنظام هو:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 2 & 10 \\ s & (-3) & 0 \\ s^0 & 10 & 0 \end{array}$$

يوجد تغييرين في إشارات عناصر العمود الأول من جدول راوث، لذلك فإن النظام يكون غير مستقر ويوجد جذرين من جذور المعادلة المميزة للنظام في النصف الأيمن من مستوى الإحداثيات المركب (RHS).

مثال 3:

اختبر استقرار النظام التالي:

$$s^5 + s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 16s + 10 = 0$$

الحل:

جدول راوث للنظام هو:

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 3 & 16 \\ s^4 & 1 & 9 & 10 \\ s^3 & \langle -6 \rangle & 6 & 0 \\ s^2 & 10 & 10 & 0 \\ s^1 & 12 & 0 & 0 \\ s^0 & 10 & 0 & 0 \end{array}$$

يوجد تغييرين في الإشارة في عناصر العمود الأول، وبالتالي فإن النظام غير مستقر ويوجد جذرين في نصف المستوى المركب الأيمن RHP

حالات خاصة لحدوث راوث هيرونز:

الحالة الأولى: ظهور "صفر" في العمود الأول:

مثال:

اختبر استقرار النظام التالي:

$$s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 3 \\ s^3 & 1 & 2 & 0 \\ s^2 & \in & 3 & 0 \\ s^1 & a & 0 & 0 \\ s^0 & 3 & 0 & 0 \end{array} \quad a = \frac{2\in - 3}{\in}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} a = \frac{0-3}{0} = -\infty \text{ فان } \epsilon \rightarrow 0$$

∴ يوجد تغيرين فى الإشارة فى العمود الأول وبالتالي فان النظام غير مستقر ويوجد جذرين فى نصف المستوى المركب الأيمن.

الحالة الثانية: ظهور صف كله "أصفار":

وجود صف كله أصفار فى جدول راوث يعنى وجود جذور على المحور التخيلى للمستوى المركب (RHS).

مثال:

اختبر استقرار النظام التالى:

$$s^4 + 2s^3 + 9s^2 + 4s + 14 = 0$$

الحل:

s^4	1	9	14
s^3	2	4	0
s^2	7	14	0
s^1	0	0	0
s^0	—	—	—

النظام يكون على حدود الاستقرار. المعادلة المساعدة هى:

$$A(s) = 7s^2 + 14 = 0 \Rightarrow s^2 + 2 = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{2}$$

ويوجد جذرين على المحور التخيلى للمستوى المركب.

مثال:

اختبر استقرار النظام التالى:

$$s^6 + s^5 + 5s^4 + s^3 + 2s^2 - 2s - 8 = 0$$

الحل:

s^6	1	5	2	-8
s^5	1	1	-2	0
s^4	4	4	-8	0
s^3	0	0	0	0
s^2	—	—	—	—
s^1	—	—	—	—
s^0	—	—	—	—

النظام غير مستقر لأن المعادلة المميزة بها معاملات سالبة.

وجود صف كله أصفار معناه وجود جذور على المحور التخيلي للمستوى المركب يمكن إيجادها كالآتى:

المعادلة المساعدة هى:

$$A(s) = 4s^4 + 4s^2 - 8 = 0$$

$$\frac{dA(s)}{ds} = 16s^3 + 8s$$

بإعادة كتابة الجدول السابق كالآتى:

s^6	1	5	2	-8
s^5	1	1	-2	0
s^4	4	4	-8	0
s^3	16	8	0	0
s^2	2	-8	0	0
s^1	72	0	0	0
s^0	-8	0	0	0

∴ يوجد تغير واحد فى الإشارة فى العمود الأول.
وبالتالى فان النظام غير مستقر ويوجد جذر واحد فى نصف المستوى المركب الأيمن.

الحالة الثالثة: النظم القابلة للضبط:
لتكن المعادلة المميزة هى:

$$D(s) = 1 + K G(s) H(s) = 0$$

ماهى قيمة معامل الكسب K التى تجعل هذه النظام مستقراً؟

مثال:

أوجد قيمة معامل الكسب K التى تجعل جذور المعادلة الآتية فى النصف الأيسر من مستوى الإحداثيات المركب (أى تجعل النظام مستقراً):

$$s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 2s + K = 0$$

الحل:

جدول راوث لهذه المعادلة هو:

s^4	1	4	K
s^3	2	2	0
s^2	3	K	0
s^1	a	0	0
s^0	K	0	0

$$a = \frac{6 - 2K}{3}$$

كى يكون النظام مستقراً يجب أن يكون $a \geq 0$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{6-2K}{3} \geq 0 &\Rightarrow 6-2K \geq 0 \Rightarrow -2K \geq -6 \\ &\Rightarrow 2K \leq 6 \Rightarrow K \leq 3 \end{aligned}$$

لكن K تظهر بمفردها فى العمود الأول، لذلك يجب أن يكون:

$$K \geq 0$$

∴ قيمة K التى تجعل جذور المعادلة السابقة فى النصف الأيسر من مستوى الأحداثيات المركبة (أى التى تجعل النظام مستقرًا) هى:

$$0 < K < 3$$

عند القيمة $K = 2$ نحصل على صف كله أصفار وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هى:

$$A(s) = 3s^2 + K = 0 \Rightarrow 3s^2 + 3 = 0$$

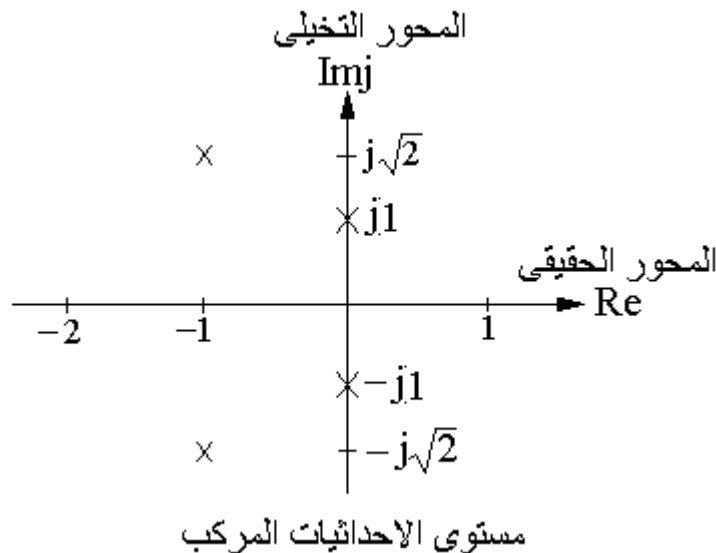
$$\Rightarrow s^2 + 1 = 0 \Rightarrow s = \pm j$$

وبقسمة المعادلة المميزة على المعادلة المساعدة نحصل على:

$$\begin{array}{r} s^2 + 2s + 3 \\ s^2 + 1 \overline{) s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 2s + 3} \\ \underline{s^4 + s^2} \\ 2s^3 + 3s^2 + 2s \\ \underline{2s^3 + 2s} \\ 3s^3 + 3 \\ \underline{3s^3 + 3} \\ 0 0 \end{array}$$

$$\therefore s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 2s + 3 = (s^2 + 1)(s^2 + 2s + 3)$$

$$= (s + j)(s - j)(s + 1 + j\sqrt{2})(s + 1 - j\sqrt{2})$$



تمارين

(1) باستخدام طريقة راوث هيروتز، اختبر استقرار النظم التالية:

- | | |
|-----------------------------------|--|
| (a) $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 1$ | (b) $s^5 + s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 3s + 63$ |
| (c) $s^4 + s^3 + 2s^2 + 6s + 8$ | (d) $s^4 + 3s^2 + 4$ |
| (e) $s^4 + 2s^3 + 5s^2 - 4s - 14$ | (f) $s^5 + 3s^4 + 4s^3 + 7s^2 + 4s + 2$ |
| (g) $3s^5 + 2s^3 + s$ | (h) $2s^5 + 4s^4 + s^3 + 2s^2 + 3s + 6$ |
| (i) $5s^4 + 6s^3 + 2s^2 + 4s + 5$ | (i) $2s^4 + 2s^3 + s^2 + s - 3$ |

فى جميع الحالات، أوجد عدد الجذور (إن وجدت) التى تقع فى النصف الأيمن للمستوى المركب.

(2) المعادلة المميزة لمجموعة نظم تحكم ذات تغذية خلفية معطاة أسفله. أوجد قيمة K التى تجعل التى تجعل النظام مستقراً فى كل حالة.

- | | |
|-------------------------------------|---|
| (a) $s^4 + 22s^3 + 10s^2 + 2s + K$ | (b) $s^3 + (2 + K)s^2 + (8 + 16K)s + 6$ |
| (c) $s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + 4 + K$ | (d) $s^5 + s^4 + 2s^3 + s^2 + s + K$ |

(3) أوجد مدى معامل الكسب K اللازم لاستقرار نظام تحكم ذو تغذية خلفية، الدالة الناقلة للحلقة المفتوحة له معطاة كالتالى:

- | | |
|------------------------------------|---|
| (a) $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$ | (b) $G(s) = \frac{K}{s(s^3 + 6s^2 + 1)(s+6)}$ |
|------------------------------------|---|

(4) نظام تحكم ذو تغذية خلفية، المعادلة المميزة له هى:

$$s^3 + (4 + K)s^2 + 6s + 16 + 8K = 0$$

أوجد القيمة القصوى الموجبة لمعامل الكسب K التى يمكن افتراضها لهذا النظام قبل أن يصبح النظام غير مستقر.